## Επιφάνειες γραφήματα:

$h: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, λεία.

$\Gamma_h = \{ (x,y,h(x,y)) \mid (x,y) \in U \}$

$X: U \to \Gamma_h : \; X(x,y) = (x,y,h(x,y))$

$$N = \frac{(-h_x, -h_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}, \quad X_x = (1,0,h_x), \; X_y = (0,1,h_y)$$

$E = \|X_x\|^2 = 1 + h_x^2$

$F = \langle X_x, X_y \rangle = h_x h_y$

$G = \|X_y\|^2 = 1 + h_y^2$

$$e = \langle X_{xx}, N \rangle = \frac{h_{xx}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}$$

$$f = \langle X_{xy}, N \rangle = \frac{h_{xy}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}$$

$$g = \langle X_{yy}, N \rangle = \frac{h_{yy}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}$$

$X_{xx} = (0,0,h_{xx})$

$X_{xy} = (0,0,h_{xy})$

$X_{yy} = (0,0,h_{yy})$

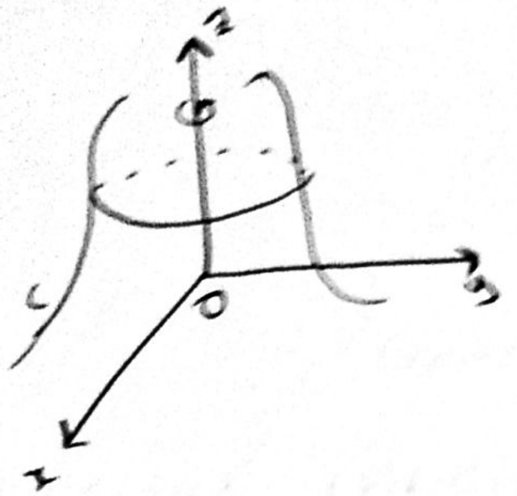
$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + h_x^2 & h_x h_y \\ h_x h_y & 1 + h_y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}} \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{xy} & h_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{K = \frac{h_{xx} h_{yy} - h_{xy}^2}{(h_x^2 + h_y^2 + 1)}}$$

$$\boxed{H = \frac{(1+h_y^2) h_{xx} - 2 h_x h_y h_{xy} + (1 + h_x^2) h_{yy}}{2 (h_x^2 + h_y^2 + 1)^{3/2}}}$$

Επ. περιστροφής επιφάνεια:




$c: I \to Oxz$ μια παραμετρ. με το μήκος τόξου και κανονική παραμετρική παράσταση

$c(s) = (\phi(s), 0, \psi(s))$

$\phi(s) > 0$

$(\dot\phi(s))^2 + (\dot\psi(s))^2 = 1, \forall s \in I$

$X: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$X(s,\theta) = (\phi(s)\cos\theta, \phi(s)\sin\theta, \psi(s))$

$N = \dfrac{X_s \times X_\theta}{\|X_s \times X_\theta\|}$, $\quad X_s(s,\theta) = (\dot\phi(s)\cos\theta, \dot\phi(s)\sin\theta, \dot\psi(s))$

$X_\theta(s,\theta) = (-\phi(s)\sin\theta, \phi(s)\cos\theta, 0)$

$$X_s \times X_\theta(s,\theta) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dot\phi(s)\cos\theta & \dot\phi(s)\sin\theta & \dot\psi(s) \\ -\phi(s)\sin\theta & \phi(s)\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-\phi(s)\dot\psi(s)\cos\theta, -\phi(s)\dot\psi(s)\sin\theta, \phi(s)\dot\phi(s))$$

$$\|X_s \times X_\theta(s,\theta)\| = \sqrt{\phi^2(s)\cdot(\dot\psi(s))^2 + \phi^2(s)(\dot\phi(s))^2} = \phi(s)$$

$$\boxed{N(s,\theta) = (-\dot\psi(s)\cos\theta, -\psi(s)\sin\theta, \dot\phi(s))}$$

$E = \|X_s\|^2 = (\dot\phi(s))^2 + (\dot\psi(s))^2 = 1$

$F = \langle X_s, X_\theta \rangle = 0$

$G = \|X_\theta\|^2 = \phi^2$,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \phi^2(s) \end{pmatrix}$$

$$X_{ss}(s,\theta) = (\ddot{\phi}(s)\cos\theta, \ddot{\phi}(s)\sin\theta, \ddot{\psi}(s))$$

$$X_{s\theta}(s,\theta) = (-\dot{\phi}(s)\sin\theta, \dot{\phi}(s)\cos\theta, 0)$$

$$X_{\theta\theta}(s,\theta) = (-\phi(s)\cos\theta, -\phi(s)\sin\theta, 0)$$

$$e = \langle X_{ss}, N\rangle = -\ddot{\phi}\dot{\psi}\cos^2\theta = \ddot{\phi}\dot{\psi}\sin^2\theta = \ddot{\psi}\dot{\phi}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{e = \dot{\phi}\ddot{\psi} - \dot{\psi}\ddot{\phi}} \\ \boxed{f = \langle X_{s\theta}, N\rangle = 0} \\ \boxed{g = \langle X_{\theta\theta}, N\rangle = \phi\dot{\psi}} \end{array}\right\} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi}\ddot{\psi} - \dot{\psi}\ddot{\phi} & 0 \\ 0 & \phi\dot{\psi} \end{pmatrix}$$

<u>Καμπυλότητα Gauss:</u>

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{(\dot{\phi}\ddot{\psi} - \dot{\psi}\ddot{\phi})(\phi\dot{\psi})}{\phi^2} = \frac{\dot{\phi}\dot{\psi}\ddot{\psi} - (\dot{\psi})^2\ddot{\phi}}{\phi}$$

$$= -\frac{(\dot{\phi})^2\ddot{\phi} + (\dot{\psi})^2\ddot{\phi}}{\phi} \Rightarrow \boxed{K = -\frac{\ddot{\phi}}{\phi}}$$

## Παραδείγματα επιφανειών με $K=0$:

$$K=0 \Leftrightarrow \ddot{\phi}(s)=0 \Rightarrow \dot{\phi}(s)=a \Leftrightarrow \phi(s)=a\cdot s+a_0$$

Επειδή $(\dot{\phi})^2+(\dot{\psi})^2=1 \Rightarrow \dot{\psi}(s)=b \Rightarrow \psi(s)=b(s)+b_0$

Άρα $\Rightarrow$ Η $C$ είναι ευθ. τμήμα//

**Ερώτημα:** Υπάρχουν άλλες επιφάνειες με καμπυλότητα Gauss $1$ εκτός της $S^2$;;;

$$K=1 \Leftrightarrow -\frac{\ddot{\phi}}{\phi}=1 \Leftrightarrow \ddot{\phi}+\phi=0$$

$$\phi(s)=a\cos s$$

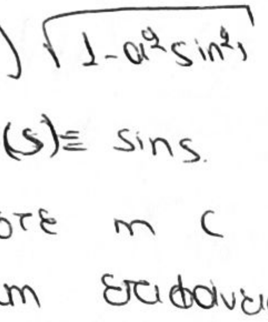
$$(\dot{\phi}(s))^2+(\dot{\psi}(s))^2=1 \Leftrightarrow$$

$$a^2\sin^2 s+(\dot{\psi}(s))^2=1 \Leftrightarrow$$

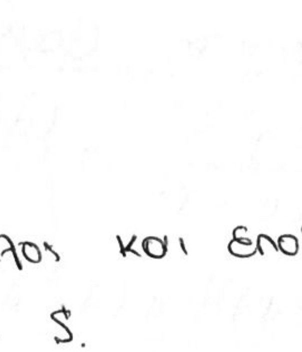
$$\dot{\psi}(s)=\pm\sqrt{1-a^2\sin^2 s}$$

$$\psi(s)=\int\sqrt{1-a^2\sin^2 s}\,ds.$$

- Αν $a=1$ : $\psi(s)\equiv \sin s$.
- Αν $a\neq 1$ : τότε η $C$ ΔΕΝ είναι κύκλος και επομένως η παραγόμενη επιφάνεια ΔΕΝ είναι η $S$.
- Αν $a<1$ $\quad K\equiv 1$



- Αν $a>1$ $\quad K\equiv 1$



(5)

$$N_s(s,\theta) = (-\ddot{\psi}(s)\cos\theta, -\ddot{\psi}(s)\sin\theta, \ddot{\phi}(s)) \quad \Big/ \quad LX_s = -N_s,$$

$$N_\theta(s,\theta) = (\dot{\psi}(s)\sin\theta, -\dot{\psi}(s)\cos\theta, 0) \quad \Big/ \quad LX_\theta = -N_\theta.$$

Η ορθοκαν. βάση του εφαπτ. επιπέδου είναι:

$$\left\{X_s, \frac{X_\theta}{\|X_\theta\|} = \frac{X_\theta}{\phi}\right\}.$$

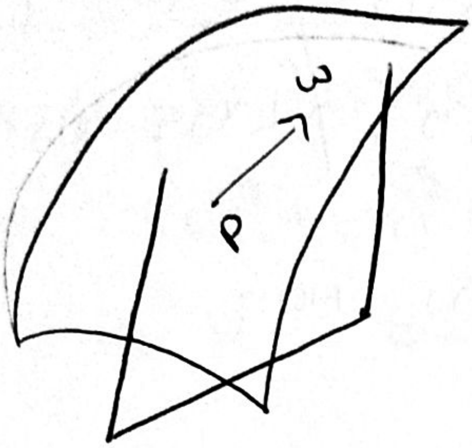
$$N_s = \langle N_s, X_s\rangle X_s + \langle N_s, \frac{X_\theta}{\phi}\rangle \frac{X_\theta}{\phi}$$

$$N_\theta = \langle N_\theta, X_s\rangle X_s + \langle N_\theta, \frac{X_\theta}{\phi}\rangle \frac{X_\phi}{\phi} \iff$$

$$\begin{cases} N_s = -(\dot{\phi}\ddot{\psi} - \dot{\psi}\ddot{\phi}) X_s \\ N_\theta = -\phi\dot{\psi} \cdot \dfrac{X_\phi}{\phi^2} = -\dfrac{\dot{\psi}}{\phi} X_\phi. \end{cases} \iff \begin{cases} LX_s = kX_s \\ LX_\theta = \dfrac{\dot{\psi}}{\phi} X_\theta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \phi^2(s) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi}\ddot{\psi} - \dot{\psi}\ddot{\phi} & 0 \\ 0 & \phi\dot{\psi} \end{pmatrix}$$




$II_p : T_pS \to \mathbb{R}$, $II_p(\omega) = \langle L_p\omega, \omega\rangle_p$

$D_p = \{\omega \in T_pS \mid II_p(\omega) = \pm 1\}$

δεικτρίσσα Dupin.

$L_p e_1 = k(p) e_1$

$L_p e_2 = k_2(p) e_2$

$\omega = x e_1 + y e_2$

$$II_p(\omega) = \langle L_p\omega, L_p\omega\rangle = \langle L_p(xe_1 + ye_2), xe_1 + ye_2\rangle$$
$$= \langle xLe_1 + yLe_2, xe_1 + ye_2\rangle$$
$$= \langle x k_1(p) e_1 + y k_2(p) e_2, xe_1 + ye_2\rangle$$
$$\Rightarrow II_p(\omega) = k_1(p)x^2 + k_2(p)y^2$$

$D_p = \{\omega = xe_1 + ye_2 \in T_pS \mid k_1(p)x^2 + k_2(p)y^2 = \pm 1\}$ κων. τομή

- $II_p$ θετικά η αρνητικά ορισμένη $\Leftrightarrow k_1(p)k_2(p) > 0 \Leftrightarrow K(p) > 0$ $\Leftrightarrow D_p$ έλλειψη.

- $II_p$ αόριστη $\Leftrightarrow k_1(p)k_2(p) < 0 \Leftrightarrow K(p) < 0 \Leftrightarrow D_p$ υπερβολή

- $II_p$ θετικά ή αρνητικά ημιορισμένη $\Leftrightarrow k_1k_2(p) = 0 \overset{k_1(p)+k_2(p) \neq 0}{\Leftrightarrow}$ $K(p) = 0 \neq H(p) \Leftrightarrow D_p$ ζεύγος ευθειών.

# Ταξινόμηση των σημείων

*Ορισμός* Το σημείο $p$ καλείται

- Ελλειπτικό $\Leftrightarrow K(p) > 0$
- Υπερβολικό $\Leftrightarrow K(p) < 0 \Leftrightarrow k_1(p)\,k_2(p) < 0 \Leftrightarrow \mathrm{II}_p$ είναι αόριστη.
- Παραβολικό $\Leftrightarrow K(p) = 0 \,\&\, H(p) \neq 0 \Leftrightarrow$ ακριβώς από τις κύριες καμπυλότητες είναι μηδέν. $\Leftrightarrow$ $\neq$ μηδενική.
- Ισοπεδο $\Leftrightarrow K(p) = 0 = H(p) \Leftrightarrow k_1(p) = k_2(p) = 0$
  $\Leftrightarrow \mathrm{II}_p = 0$ όλα τα σημεία του επιπέδου είναι ισοπεδα.
- Ομφαλικό $\Leftrightarrow k_1(p) = k_2(p) \neq 0 \Leftrightarrow H^2(p) = K(p) > 0$. Άρα είναι ελλειπτικά. (στη σφαίρα)
  όλα τα σημεία στη σφαίρα είναι ομφαλικά.

*Ερώτημα*. Εκτός της σφαίρας υπάρχουν άλλες επιφάνειες που $k_1 = k_2$;
Ισοδύναμο με το ερώτημα $H^2 = K$, εκτός σφαίρας & επιπέδου.

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

- Ελλειπτικά σημεία $\overset{K(p)>0}{\Longleftrightarrow} eg - f^2 > 0$ ($EG - F^2 > 0$, αφού)
- Υπερβολικά σημεία. $\overset{K(p)<0}{\Longleftrightarrow} eg - f^2 < 0$.
- Ισοπεδα σημεία $\overset{K(p)=0}{\Longleftrightarrow} e = f = g = 0$.
- Ομφαλικά σημεία $\Leftrightarrow \frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G} \neq 0$,

Αν $p$ είναι ομφαλικό, τότε $\mathrm{II}_p(w) = k_1(p)(x^2 + y^2) = k_1(p)\|w\|^2$

Αν $p$ ομφαλικό $\Leftrightarrow \boxed{\mathrm{II}_p = \lambda\, \mathrm{I}_p,\ \lambda \neq 0}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},\ \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e = \lambda E \\ f = \lambda F \\ g = \lambda G \end{cases},\ \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G} \neq 0$$

αν $F = 0$ ομφαλικό

- Παραβολικά $\Leftrightarrow eg - f^2 = 0$ και $(e, f, g) \neq (0,0,0)$.

- $p$ καλείται ελλειπτικό $\Leftrightarrow$ $\mathrm{II}_p$ θετικώς ή αρνητικώς ημιορισμένη $\Leftrightarrow$ $K(p) > 0$
- $p$ καλείται υπερβολικό $\Leftrightarrow$ $\mathrm{II}_p$ είναι αόριστη $\Leftrightarrow$ $K(p) < 0$
- $p$ καλείται παραβολικό $\Leftrightarrow$ $\mathrm{II}_p$ θετικώς ή αρνητικώς ημιορισμένη $\Leftrightarrow$ $K(p) = 0 \neq H(p)$.
- $p$ καλείται ισοπεδο $\Leftrightarrow$ $\mathrm{II}_p = 0 \Leftrightarrow L_p = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = 0 \Leftrightarrow H^2(p) = K(p) = 0$
- $p$ καλείται ομφαλικό $\Leftrightarrow k_1(p) = k_2(p) \neq 0 \Leftrightarrow L_p = \underset{\lambda \neq 0}{\lambda}\, I d. \Leftrightarrow H^2(p) = K(p) > 0$

$$\Leftrightarrow \mathrm{II}_p = \lambda\, \mathrm{I}_p,\ \lambda \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow e = \lambda E,\ f = \lambda F,\ g = \lambda G$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G} = \lambda \neq 0}$$

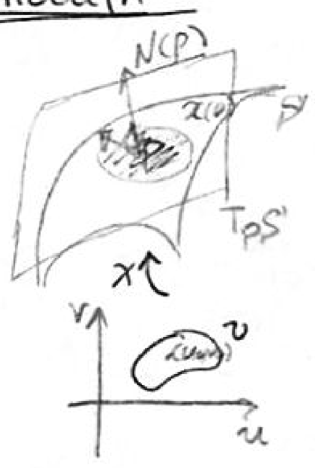
Τα ομφαλικά σημεία είναι πάντα ελλειπτικά.

~~Θεώρημα~~ / <u>Πρόταση</u> Έστω $p$ σημείο κανονικής επιφάνειας $S$

(i) Αν το $p$ είναι ελλειπτικό, τότε υπάρχει περιοχή του $V$ στην $S$ τ.ω. $V$ να περιέχεται στον έναν ακριβώς από τους ημιχώρους με ακμή το $T_pS$ και $V \cap T_pS = \{p\}$ π.χ. σφαίρα και όχι ο κύλινδρος

(ii) Αν το σημείο $p$ είναι <u>υπερβολικό</u>, τότε κάθε περιοχή του σημείου $p$ περιέχει σημεία σε αμφότερα (εκατέρωθεν) τους ημιχώρους.

<u>Απόδειξη</u>




Θεωρώ σύστημα συντ/νων $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ με παραμέτρους $(u,v)$ και $p = X(u_0, v_0)$

Θεωρώ τη λεία συνάρτηση $h : U \to \mathbb{R}$

$h(u,v) = \langle X(u,v) - X(u_0,v_0), N(p) \rangle$ για λέει σε ποιον ημιχώρο είμαστε.

$h_u(u,v) = \langle X_u(u,v), N(p) \rangle$

$h_v(u,v) = \langle X_v(u,v), N(p) \rangle$

$h_u(u_0,v_0) = 0 = h_v(u_0,v_0)$. δηλαδή το $(u_0,v_0) \in U$ είναι κρίσιμο σημείο της $h$.

$h_u(u_0,v_0) = \langle \underset{\in T_pS}{X_u(u_0,v_0)}, \underset{\text{κάθετο} \perp T_pS}{N(p)} \rangle \overset{\text{άρα}}{=} 0$

Ομοίως, $h_v(u_0,v_0) = 0$

$h_{uu}(u,v) = \langle X_{uu}(u,v), N(p) \rangle = e(u,v)$

$h_{uv}(u,v) = \langle X_{uv}(u,v), N(p) \rangle = f(u,v)$

$h_{vv}(u,v) = \langle X_{vv}(u,v), N(p) \rangle = g(u,v)$

Ο Εσσιανος πινακας της $h$ στο $(u_0,v_0)$ ειναι:

$$\begin{pmatrix} h_{uu}(u_0,v_0) & h_{uv}(u_0,v_0) \\ h_{uv}(u_0,v_0) & h_{vv}(u_0,v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e(u_0,v_0) & f(u_0,v_0) \\ f(v_0,v_0) & g(u_0,v_0) \end{pmatrix} = (eg-f^2)(u_0,v_0)$$

(i) Αν $K(p) > 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} h_{uu}(u_0,v_0) & h_{uv}(u_0,v_0) \\ h_{uv}(u_0,v_0) & h_{uv}(v_0,v_0) \end{vmatrix} = (eg-f^2)(u_0,v_0)$

$K(p) = \dfrac{eg-f^2}{EG-F^2}(u_0,v_0) > 0$

Αρα, η $h$ παρουσιαζει στο $(u_0,v_0)$ τοπικο ακροτατο $h(u_0,v_0)=0$.

(ii) $(eg-f^2)(u_0,v_0) < 0$

**Θεωρημα** Εστω $S$ συνεκτικη κανονικη προσ/νη επιφανεια Αν ισχυει $k_1=k_2$ παντου (ή ισοδυναμα ισχυει $H^2=K$ παντου) τότε η $S$ ειναι ανοικτο υποσυνολο ή επιπεδου/σφαιρας.

Αποδειξη

Γνωριζω οτι $\underbrace{k_1(p)=k_2(p)}_{k(p)}$ $\forall p \in S$

$L_p \sim \begin{pmatrix} k(p) & 0 \\ 0 & k(p) \end{pmatrix} = k(p) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{L_p = k(p)\, Id_p \quad \forall p \in S}$

$k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$

Αρα, $k=H$ λεια (επιφ/νη). Θεωρω συστημα συν/νων $X: V \subset \mathbb{R}^2 \to S$ με παραμετρους $(u,v)$ $\begin{matrix} LX_u = kX_u \\ LX_v = kX_v \end{matrix} \Longleftrightarrow \begin{matrix} LX_u = -(N\circ X)_u = -N_u \\ LX_v = -N_v \end{matrix}$

$$\left.\begin{matrix} -N_u = kX_u \Rightarrow -N_{uv} = (k\circ X)_v X_u + (k\circ X) X_{uv} \\ -N_v = kX_v \Rightarrow -N_{vu} = (k\circ X)_u X_v + (k\circ X) X_{vu} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underbrace{(k\circ X_u)X_u - (k\circ X_u)X_v = 0}_{\{X_u, X_v\} \text{ βαση}}$$

$(k\circ X)_u = 0 = (k\circ X)_v \Rightarrow d_k(X_u) = 0 = d_k(X_v)$

$\Rightarrow dk_p = 0 \quad \forall p \in X(U)$.

Αρα, εδειξα οτι $dk_p = 0 \quad \forall p \in S$

$\Rightarrow k = \sigma\tau\alpha\theta = \lambda$

• <u>Περιπτωση</u> $\lambda = 0 \Rightarrow L_p = 0 \quad \forall p \in S$

$\Rightarrow dN_p = 0 \quad \forall p \in S \Rightarrow N =$ σταθερο διανυσμα $= (A, B, \Gamma)$

Οριζω την μια συναρτηση $h: S \to \mathbb{R}$

$h(p) = h(x,y,z) = Ax + By + \Gamma z = \langle p, N \rangle$.

$dh_p(w) = \langle w, N \rangle, \; w \in T_pS$

$= 0$

$\Rightarrow h =$ σταθερη $\Rightarrow$ ειναι τμημα επιπεδου.